

# Omrežje

---

## Osnovni pojmi

Naj bo dana končna množica enot  $\mathbf{E} = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ . Odnosi med enotami naj bodo opisani z eno ali več dvomestnimi *relacijami*  $R_t \subseteq \mathbf{E} \times \mathbf{E}$ ,  $t = 1, \dots, r$ , ki določajo *omrežje*  $\mathcal{N} = (\mathbf{E}, R_1, R_2, \dots, R_r)$ .

Relacija lahko predstavlja npr. prijateljstvo, sovraštvo, sorodstvene ednose (...je otrok od..., ...je sestra od..., ...je poročen z...), citiranje...

V nadaljevanju se bomo v večini primerov omejili na eno samo relacijo  $R$ .

Zapis  $X_i R X_j$  preberemo:

enota  $X_i$  je v relaciji  $R$  z enoto  $X_j$ .

Primer: če  $R$  predstavlja relacijo 'imeti rad', pomeni zapis  $X_i R X_j$ , da ima oseba  $X_i$  rada osebo  $X_j$ .

Relacija ima lahko dodatne lastnosti:

- *refleksivnost*:  $\forall x \in \mathbf{E} : xRx$
- *irefleksivnost*:  $\forall x \in \mathbf{E} : \neg xRx$
- *simetričnost*:  $\forall x, y \in \mathbf{E} : (xRy \Rightarrow yRx)$  (poroka)
- *asimetričnost*:  $\forall x, y \in \mathbf{E} : \neg(xRy \wedge yRx)$  (je sin od)
- *antisimetričnost*:  $\forall x, y \in \mathbf{E} : (xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y)$
- *tranzitivnost*:  $\forall x, y, z \in \mathbf{E} : (xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz)$
- *intranztivnost*:  $\forall x, y, z \in \mathbf{E} : (xRy \wedge yRz \Rightarrow \neg xRz)$
- *sovisnost*:  $\forall x, y \in \mathbf{E} : (x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx)$
- *stroga sovisnost*:  $\forall x, y \in \mathbf{E} : (xRy \vee yRx)$
- *delna urejenost*: relacija je delno urejena, če je tranzitivna, refleksivna in antisimetrična;
- *ekvivalenčna relacija*: relacija je ekvivalenčna, če je tranzitivna, refleksivna in simetrična;

Omrežje, v katerem nastopa relacija  $R$ , lahko predstavimo na več načinov:

- Predstavitev s pripadajočo **dvojiško matriko**

$\mathbf{R} = [r_{ij}]_{n \times n}$ , kjer je

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & X_i R X_j \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Včasih je lahko  $r_{ij}$  tudi realno število, ki izraža moč relacije  $R$  med enotama  $X_i$  in  $X_j$ .

- **seznam sosedov**

Omrežje lahko opišemo tako, da za vsako enoto navedemo seznam vseh enot, s katerimi je enota v relaciji.

- opis z **grafom**  $G = (V, L)$  kjer je  $V$  množica točk (*Vertices*) in  $L$  množica (usmerjenih ali neusmerjenih) povezav (*Lines*). Točke grafa predstavljajo enote v omrežju, povezave pa relacijo.

Graf predstavimo s sliko, kjer točke grafa predstavimo s krožci, usmerjene povezave s puščicami, neusmerjene povezave pa z daljicami, ki povezujejo ustrezne točke.

$X_i R X_j \Rightarrow$  v grafu obstaja usmerjena povezava, ki vodi od točke  $X_i$  do točke  $X_j$ . Točka  $X_i$  se imenuje *začetna*, točka  $X_j$  pa *končna* točka povezave.

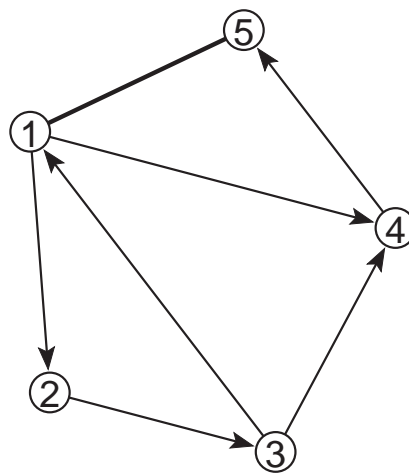
Povezavo, kjer je začetna točka enaka končni, imenujemo *zanka*.

Če se v grafu pojavita usmerjeni povezavi med dvema točkama v obeh smereh, ju včasih zamenjamo z neusmerjeno povezavo.

Včasih pa storimo obratno, neusmerjeno povezavo štejemo kot dve usmerjeni povezavi med ustreznima točkama v nasprotnih smereh.

Število točk v grafu označimo z  $n$ , število usmerjenih povezav pa z  $m$ .

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0
4	0	0	0	0	1
5	1	0	0	0	0



Arcslist

1 2 4

2 3

3 1 4

4 5

Edgeslist

1 5

## Tipi omrežij

- *neusmerjeno omrežje* – relacija je simetrična, oziroma povezave v pripadajočem grafu so neusmerjene. Neusmerjene povezave označimo z  $E$  – *edges* ( $L = E$ ).
- *usmerjeno omrežje* – relacija ni simetrična, oziroma vse povezave v pripadajočem grafu so usmerjene. Usmerjene povezave označimo z  $A$  – *arcs* ( $L = A$ ).
- *splošno omrežje* – v pripadajočem grafu nastopata obe vrsti povezav – *mixed network*,  $L = A \cup E$ .
- *dvovrstno omrežje*  
Dvovrstno omrežje sestavljata dve množici enot (npr. osebe in dogodki), relacija pa ti dve množici povezuje, npr. vključenost oseb v družabne dogodke.

## **Mala in velika omrežja**

Omrežja z nekaj 10 enotami in povezavami bomo imenovali *mala omrežja*, omrežja z nekaj 1000 enotami in povezavami pa *velika omrežja*.

## **Redka in gosta omrežja**

Omrežje je *redko*, če je v pripadajočem grafu število povezav istega velikostnega reda kot število točk ( $n \approx km$ ). Če je omrežje redko, lahko z nekaterimi algoritmi hitro analiziramo tudi zelo velika omrežja. V praksi pogosto naletimo na zelo velika, a redka omrežja.

V splošnem je število povezav lahko precej večje kot število točk. Tako omrežje imenujemo *gosto*.

Če je vsaka enota omrežja povezana z vsako drugo enoto, je število povezav  $n^2$  (število elementov v ustrezni matriki).

Če pa je vsaka enota omrežja povezana z vsako drugo enoto, razen sama s sabo (graf brez zank), je število povezav  $n(n-1)$  (število elementov v matriki brez diagonale).

Na tej osnovi lahko definiramo gostoto omrežja:

Za omrežja z zankami:

$$Density1 = \frac{m}{n^2}$$

Za omrežja brez zank:

$$Density2 = \frac{m}{n(n-1)}$$

Če predpostavimo, da med dvema točkama ne more biti večkratnih povezav, (točki sta torej lahko nepovezani ali povezani z eno samo povezavo), je gostota število med 0 in 1.

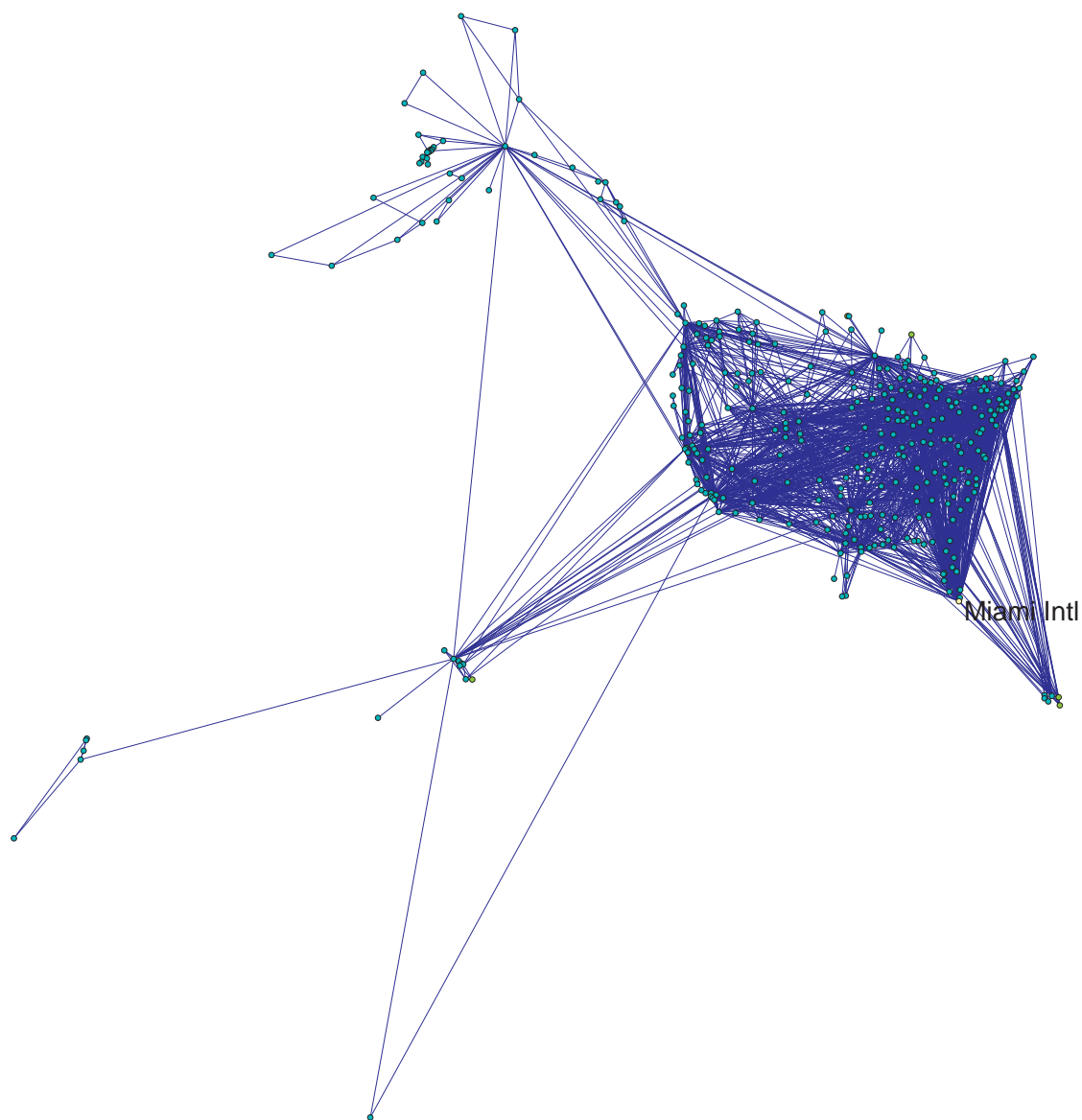
Gostota omrežja je ena od mer, s katerimi lahko primerjamo različna omrežja med sabo.



## Primeri (velikih) omrežij

- družboslovna omrežja
  - povezave med osebami (prijatelji);
  - odnosi med političnimi strankami;
  - trgovanje med organizacijami, državami;
  - rodovniki (genealogije);
  - referenčna omrežja (omrežja citiranj);
  - računalniška omrežja (lokalna omrežja, Internet, povezave med predstavitvenimi stranmi);
  - omrežja telefonskih klicev;
- diagrami poteka programskih sistemov v računalništvu;
- Petrijeve mreže;
- organske molekule v kemiji;
- omrežja povezanosti med posameznimi besedami v besedilu;
- transportna omrežja (letalske povezave, cestna, vodovodna, električna omrežja. . . ).

## Letalske povezave med 332 ameriškimi letališči (332 točk, 2116 povezav)



## Pajek



**Pajek** je programski paket za Windows 32 in 64, ki omogoča analizo *velikih omrežij*. Program je prosto dostopen na naslovu: <http://mrvar.fdv.uni-lj.si/pajek/>

Analize v programu Pajek izvajamo s pomočjo šestih podatkovnih struktur:

1. omrežje,
2. razbitje,
3. skupina,
4. permutacija,
5. vektor
6. hierarhija.

Zaenkrat si pogledjmo samo omrežje.

## Omrežje – Network

Privzeti podaljšek za omrežje je .NET

Omrežje na vhodni datoteki lahko opišemo na več načinov.

Poglejmo si tri načine:

### *1. Seznamei sosedov (Arcslist / Edgeslist)*

\*Vertices 5

1 "a"

2 "b"

3 "c"

4 "d"

5 "e"

\*Arcslist

1 2 4

2 3

3 1 4

4 5

\*Edgeslist

1 5

**Pojasnila:**

Podatke moramo pripraviti na tekstovni (ASCII) datoteki. Za urejanje podatkov lahko uporabimo kar program *NotePad*, ki je prisoten na vsaki instalaciji Windowsov. V okolju DOS je primeren urejevalnik *Edit*. Precej zmogljivejši od obeh je program *TextPad* (<http://www.textpad.com/>).

Besede, ki se začenjajo z znakom \*, morajo biti napisane v prvem stolpcu vrstice in najavljajo začetek definicije točk ali povezav.

Z ukazom \*Vertices 5 najavimo, da ima omrežje 5 točk. To mora biti prvi ukaz pri definiciji omrežja.

Sledi opis točk – za vsako točko navedemo njeno oznako, ki jo navedemo v narekovajih. Če ta del izpustimo, bodo oznake točk kar enake številkam točk s predpono *v* (npr. *v1*).

Z ukazom \*Arcslist napovemo sezname usmerjenih povezav iz danih točk (1 2 4 npr. pomeni, da vodita iz točke 1 usmerjeni povezavi v točki 2 in 4).

Podoben je ukaz \*Edgeslist, le da napove sezname neusmerjenih povezav iz dane točke.

Na koncu datoteke ne sme biti dodatnih praznih vrstic.

## ***2. Pari povezav (Arcs / Edges)***

\*Vertices 5

1 "a"

2 "b"

3 "c"

4 "d"

5 "e"

\*Arcs

1 2 1

1 4 1

2 3 2

3 1 1

3 4 2

4 5 1

\*Edges

1 5 1

**Pojasnila:**

To je najbolj splošen zapis, ki ga bomo tudi najpogosteje uporabljali. Pri tem zapisu navedemo vsako povezavo posebej v novi vrstici – navedemo začetno točko povezave in končno točko. Usmerjene povezave navedemo pod ukazom \*Arcs, neusmerjene pa pod ukazom \*Edges. Tretja številka pri vsaki povezavi pomeni vrednost na povezavi. Tako imata povezavi od 2 do 3 in od 3 do 4 vrednost 2, ostale pa vrednost 1.

V prvi opisani obliki (Arcslist / Edgeslist) vrednosti na povezavah ne moremo vnesti – ta oblika je primerna samo, če so vse vrednosti na povezavah enake 1.

Pri omrežjih, ki jih bomo obravnavali v nadaljevanju v večini primerov vrednost na povezavah ne bo pomembna, v tem primeru lahko tretjo številko v vsaki vrstici izpustimo (vse vrednosti se postavijo na 1).

### *3. Matrika povezav*

\*Vertices 5

1 "a"

2 "b"

3 "c"

4 "d"

5 "e"

\*Matrix

0 1 0 1 1

0 0 2 0 0

1 0 0 2 0

0 0 0 0 1

1 0 0 0 0

#### **Pojasnila:**

Pri tej obliki navedemo usmerjene povezave v obliki matrike (\*Matrix). Morebitne neusmerjene povezave se predstavijo z dvosmernimi usmerjenimi povezavami, ki pa jih v Pajku lahko spremenimo v neusmerjene z

Network/Create New Network/

Transform/Arcs to Edges/Bidirected only



Opisali smo samo nujne elemente, ki jih moramo navesti pri opisu omrežja. Poleg tega omogoča Pajek še podroben opis elementov, ki se uporabljajo pri risanju (koordinate točk v prostoru, oblike in barve točk in povezav, ...).

Poleg svojih *vhodnih* oblik podpira Pajek še več drugih oblik: UCINET DL; Vega; GEDCOM in nekaj kemijskih oblik: BS (Ball and Stick), MAC (Mac Molecule) in MOL (MDL MOLfile).

### ***Interaktivna izgradnja omrežja***

Manjša, enostavna omrežja lahko zgradimo tudi v programu Pajek brez predhodne definicije na tekstovni datoteki.

### **Postopek**

Najprej zgradimo prazno omrežje (omrežje brez povezav) na danem številu točk, nato vnesemo še povezave.

Izberemo: Network/Create New Network/Empty Network

V našem primeru s petimi točkami vnesemo:

**Enter number of vertices: 5**

Izberemo Draw/Network (ali pritisnemo Ctrl+G). Omrežje se predstavi s sliko v novem oknu. Točke prestavimo na željeno mesto, tako da z levo tipko na miški kliknemo na točko in jo prenesemo na željeno mesto (leve tipke medtem ne izpustimo).

Nato za vsako točko posebej navedemo povezave, ki vodijo iz dane točke. To naredimo tako, da kliknemo z desno tipko na miški na izbrano točko. Odpre se nam novo okno, kjer z dvojnimi klikom na Newline navedemo točke s katerimi je izbrana točka povezana:

Če iz dane točke vodi usmerjena povezava v točko 2, vnesemo  $-2$ , če iz točke 2 vodi usmerjena povezava v dano točko, vnesemo  $+2$ , če pa sta točki povezani z neusmerjeno povezavo, vnesemo samo 2.

Vrednost na povezavi določimo tako, da kliknemo z desno tipko na miški na osvetljeno vrstico in vnesemo željeno vrednost.

Morebitno odvečno povezavo odstranimo tako, da z levo miško na tipki dvakrat kliknemo na vrstico, kjer je povezava navedena.

Okno s sliko omrežja po potrebi osvežimo z izbiro Redraw.

## Nekaj ukazov v oknu Draw

Vsi ukazi so podrobneje opisani v datoteki navodila.pdf, ki je dostopna na WWW:

<http://mrvar.fdv.uni-lj.si/pajek/doc/navodila.pdf>

- **Options/Mark vertices using** – način označevanja točk na sliki
- **Options/Lines** – ali se usmerjene oz. neusmerjene povezave sploh prikazujejo ter način označevanja povezav
- **Options/Size** – izbira velikosti točk, pisave, puščic in debelin črt
- **Options/Colors** – izbira barve ozadja, točk, pisave, povezav

## Določanje prikazov omrežij

Pravo predstavo o omrežju dobimo pogosto šele s slikovno predstavitvijo omrežja. V program Pajek je vgrajenih precej algoritmov za avtomatično in ročno določanje prikazov omrežij.

### *Avtomatično določanje prikazov omrežij*

- **Energijska risanja** – Ideja algoritma: omrežje predstavimo kot fizikalni sistem, in iščemo stanje sistema z minimalno energijo. Vgrajena sta dva algoritma:
  - **Layout/Energy/Kamada-Kawai** – nekoliko počasnejši, a je varianta *Separate Components* primerna za risanje nepovezanih omrežij.
  - **Layout/Energy/Fruchterman-Reingold** – nekoliko hitrejši, rišemo lahko tudi v prostoru (2D ali 3D), izbira odbojnega faktorja
  - **Options/Interrupt** – koliko časa (v sekundah) naj računalnik optimizira sliko
- **Lastne vrednosti** – Izračuna željene dve ali tri lastne vektorje in jih postavi za koordinate točk, lepe rezultate dobimo pri simetričnih omrežjih (kar družboslovna omrežja ponavadi niso).

### ***Ročno določanje prikazov omrežij***

Na izbrano točko kliknemo z levo tipko na miški in jo prenesemo na željeno mesto.

Prostorske slike: sliko vrtimo s pritiskom na tipko (držanjem tipke)  $x, X, y, Y, z, Z$  (črka pomeni os vrtenja, velika/mala črka pa pozitivno ali negativno smer).

Poljubno os vrtenja izberemo s **Spin/Normal** Okrog izbrane osi vrtimo s pritiskom na  $s$  ali  $S$ .

Del omrežja si povečano pogledamo tako, da nekje na sliki pritisnemo desno tipko na miški, jo držimo in označimo željeni del (Zoom). Celotno omrežje spet izberemo z **Redraw**.

Če želimo spremembe omrežja (sliko) shraniti, izberemo ikono za shranjevanje ali **File/Network/Save** ter izberemo tip predstavitve in ime. Pri izbiri predstavitve imamo na voljo vse tiste predstavitve, ki smo jih omenili pri predstavitvi omrežja na vhodnih datotekah. Če je izbrano ime enako imenu že obstoječe datoteke, se stara datoteka poveže.

Če izberemo predstavitev Arc/Edges, je vsebina nove datoteke naslednja (razlika je le v pripisanih koordinatah  $x, y$  in  $z$  pri vsaki točki):

**\*Vertices 5**

1 "a"	0.1672	0.3272	0.5000
2 "b"	0.2029	0.7394	0.5000
3 "c"	0.6144	0.8334	0.5000
4 "d"	0.8328	0.4794	0.5000
5 "e"	0.5565	0.1666	0.5000

**\*Arcs**

1 2 1

1 4 1

2 3 2

3 1 1

3 4 2

4 5 1

**\*Edges**

1 5 1

## Izhodni formati

Dobljene ravninske ali prostorske slike omrežja lahko shranimo v izhodne oblike (2D in 3D), ki so primerne za vključevanje v besedila (npr. Word) ali pregledovanje s posebnimi pregledovalniki. Pretvorbe v izhodne oblike so na voljo v izbiri **Export**. Možne oblike so:

- EPS – Sliko v tej obliki lahko prikazujemo s programom GSView ali jo vključimo v urejevalnike besedil (npr. L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X). Sliko lahko vključimo tudi v Word.
- SVG – *Scalable Vector Graphics* – je podobno kot EPS vektorski zapis slike (sliko lahko poljubno povečujemo ali zmanjšujemo, ne da bi pri tem izgubili na kakovosti slike). Sliko lahko prikazujemo s programi za brskanje po Internetu.

Dobra stran te predstavitve so možnosti povečav izbranih delov slike in izbiranje določenih podomrežij. SVG je zgrajen na osnovi XMLja, kar pomeni, da lahko uporabljamo poljubne znake v Unicode-u. Sliko lahko nadalje urejamo s programom InkScape: <http://inkscape.org/> S tem programom lahko sliko pretvorimo tudi v številne druge formate (PDF, JPG, EPS).

- JPEG – Slika je posnetek slike na ekranu, zato ni tako

kakovostna kot vektorska slika v EPS ali SVG.

- Bitmap (BMP) – Tudi tu gre za posnetek slike na ekranu.
- Vosviewer – Sliko omrežja izvozimo v zelo zmogljiv program za prikaz omrežij VOSviewer:

<http://www.vosviewer.com/>

Program najprej naložimo na svoj računalnik in v Pajku povemo kje se nahaja (*Locate VOSviewer*). Potem lahko slike omrežij pošljemo v VOSviewer (*Send to VOSviewer*).

- X3D – Extensible 3D Graphics – za prostorske prikaze omrežij. To obliko prepoznajo programi za brskanje po Internetu z ustreznimi prikazovalniki, npr. Instant Reality:

<http://www.instantreality.org/>

Dobljeni prikaz je dinamičen – uporabnik lahko potuje po dobljenem 'svetu', izbira različne poglede, ...

- Kinemages (*KINEmatic iMAGES*)

Prosto dostopna sta programa Mage in King:

<http://kinemage.biochem.duke.edu/software/>

ki omogočata tudi preproste animacije.

- VRML – Virtual Reality Modeling Language – za prostorske prikaze omrežij. Ta format se počasi opušča in ga nadomešča X3D.



## Lastnosti lepe slike omrežja

Nekaj lastnosti lepe slike omrežja:

- čimmanj križanj povezav (graf, ki se ga da narisati brez križanja povezav, se imenuje *ravninski graf*)
- ne preostri koti med povezavami z enim krajiščem v skupni točki
- povezave ne smejo biti niti predolge niti prekratke (vse povezave približno enako dolge)
- točke ne smejo biti preblizu povezavam

---

V Pajku so koordinate točk števila med 0 in 1. Decimalno ločilo je pika. V primeru, da so koordinate števila s kakega drugega intervala, raztegnemo (skrčimo) sliko na celo okno z ukazom Options/Transform/Fit Area.

Tudi uporaba ostalih ukazov iz izbire Options/Transform je razumljiva sama po sebi (na celi sliki ali izbranem delu):

*Resize* – razteg/skrčitev slike v izbrani smeri (izbranih smereh)

*Translate* – premik slike v izbrani smeri

*Rotate 2D* – vrtenje slike v ravnini  $xy$  za izbrani kot

V Pajku preverimo lastnosti slike, tako da v oknu Draw izberemo v okviru Info lastnost, ki jo želimo preveriti:

- *Closest Vertices* – poišče najbližji točki in ju pobarva rumeno. V posebnem oknu izpiše razdaljo med točkama.
- *Smallest Angle* – od vseh povezav, ki imajo eno od krajišč v isti točki, poišče tisti dve med katerima je kot najmanjši. Ustrezne tri točke pobarva zeleno. Izpiše tudi kot med povezavama v stopinjah.
- *Shortest/Longest Line* – poišče najkrajšo povezavo (ustrezni točki pobarva rdeče) in najdaljšo povezavo (ustrezni točki pobarva modro). Izpiše tudi dolžini obeh povezav.
- *No. of Crossings* – izpiše število križanj povezav (točke, ki so krajišča povezav, ki se križajo, pobarva svetlo vijolično).
- *Vertex Closest to Line* – poišče točko, ki se nahaja najbližje povezavi. Ustrezne tri točke pobarva belo. Izpiše tudi oddaljenost te točke od povezave.

## Osnovne informacije o omrežju

Osnovne informacije o omrežju dobimo z ukazom Network/Info/General

ki se nahaja v glavnem oknu programa. Ukaz vrne

- število točk
- število usmerjenih povezav (arcs)
- število usmerjenih zank
- število neusmerjenih povezav (edges)
- število neusmerjenih zank
- obe gostoti povezav (*Density1* in *Density2*)

Dobimo še vprašanje:

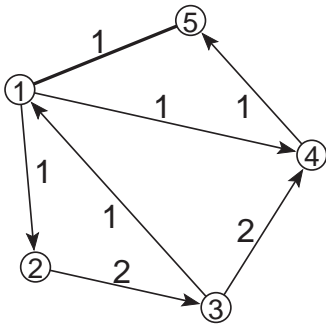
**Input 1 or 2 numbers: +/-highest, -lowest**

kjer vnesemo koliko povezav z najvišjimi/najnižjimi vrednostmi ali interval *od do* želimo izpisati.

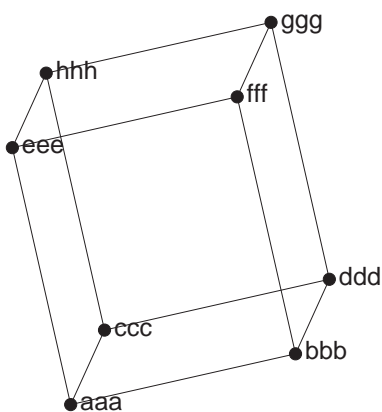
Če vnesemo npr. , dobimo 10 povezav z najvišjimi vrednostmi, če vnesemo , dobimo 10 povezav z najnižjimi vrednostmi, pri vnosu  pa dobimo izpisane povezave, ki so po velikosti od tretje do desete.

## Vaje

1. V programu Pajek interaktivno zgradite omrežje na sliki:



2. Pripravite vhodno datoteko vaja1.net z opisom omrežja v obliki kocke, kjer bodo imena točk: aaa, bbb, ccc, ddd, eee, fff, ggg in hhh. Omrežje preberite s Pajkom ter ga narišite v ravnini in prostoru.



3. Preberite omrežje, z datoteke vaja2.net ter preizkusite vse algoritme za avtomatično določanje slik omrežij.